Ein mathematisches Modell zum Parallelparken

Norbert Herrmann
Inst. f. Angew. Mathematik, Univ. Hannover

24. November 2003

1 Parallelparken

Wer kennt nicht die leidige Suche nach einem Parkplatz in einer überfüllten City. Und dann sieht man plötzlich eine Lücke am Straßenrand, weiß aber nicht, ob man hineinkommt. In der Fahrschule hat man uns gequält mit dem Rückwärtseinparken. Das könnte hier helfen, und genau darum geht es uns in diesem Beitrag. Wie ging das noch gleich?

1. Man stellt sich direkt neben das vordere Auto A in einem Abstand p zu diesem Auto.
2. Man fährt gerade rückwärts, bis der Mittelpunkt unseres Autos, bezogen auf die vier Reifen, auf gleicher Höhe mit dem Ende des Vorderautos A ist. (Wir werden später sehen, daß das verbessert werden kann. Man muß nur so weit zurückfahren, bis die Hinterachse unseres Autos mit dem Ende des Nachbarautos übereinstimmt!)
3. Jetzt dreht man das Steuerrad vollständig bis zum Anschlag, so daß man in die Lücke hineinfährt. Dabei fährt man einen Kreisbogen, zu dem der Winkel α gehört.
4. Dann dreht man das Vorderrad vollständig in die entgegengesetzte Richtung, um wieder parallel zur Straße zu gelangen, und fährt den entgegengesetzten Kreisbogen mit dem selben Winkel α.
5. Schließlich fährt man noch ein Stückchen nach vorne, um das hintere Auto B nicht einzuklemmen.

Die Fragen, die sich hier stellen, lauten:

- Wie breit muß die Lücke mindestens sein, damit wir dort hineinkommmen?
- In welchem Abstand p beginnt man das Spielchen?
- Welchen Kreisbogen sollte man fahren, wie groß ist also der Winkel α?

2 Die Formeln von Rebecca Hoyle

Mitte April dieses Jahres ging vor allem in den Online–Versionen verschiedener Tageszeitungen folgende „Formel zum Einparken“ um die Welt (aus satztechnischen Gründen schreiben wir sie in zwei Zeilen):

$$\begin{aligned} p \quad = \quad & r - w/2, g) - w + 2r + b, f) - w + 2r - fg \\ & \max((r + w/2)^2 + f^2, (r + w/2)^2 + b^2) \pounds \min((2r)^2, (r + w/2 + k)^2) \end{aligned}$$

Internetleser, die auf diese Formel stießen, waren verstört, denn die Formel machte so recht keinen Sinn.

– Was soll gleich zu Beginn die geschlossene Klammer, wenn zuvor keine öffnende Klammer vorhanden ist?

– Was sollen die vielen Kommata mitten im Geschehen?

– Welche Bedeutung hat das englische Pfundzeichen in der zweiten Zeile?

Angeblich stammt diese Formel von der englischen Mathematikerin Rebecca Hoyle. Nun, zu ihrer Ehre sei gesagt, daß sie in der Tat eine solch unsinnige Formel nicht veröfffentlich hat. Auf ihrer home-page findet man folgendes Formelsystem, das aus vier einzelnen Formeln besteht:

$$
\begin{aligned}
p &= r - \frac{w}{2} && (1)\\
g &\geq w + 2r + b && (2)\\
f &\leq w + 2r - fg && (3)\\
\max\left(\left(r + \frac{w}{2}\right)^2 + f^2, \left(r + \frac{w}{2}\right)^2 + b^2\right) &\leq \min\left(4r^2, \left(r + \frac{w}{2} + k\right)^2\right) && (4)
\end{aligned}
$$

Dabei ist

- p der seitliche Abstand zum vorderen Auto A,
- r der Radius des kleinsten Kreises, den der Automittelpunkt, das ist der Mittelpunkt des Rechtecks aus den vier Reifen, beschreiben kann,
- w die Breite unseres Autos,
- g die Breite der benötigten Parklücke
- f der Abstand vom Automittelpunkt zur Front
- b der Abstand vom Automittelpunkt zum Autoende
- fg der Abstand zum Vorderauto am Ende des Einparkens,
- k der Abstand zum Bordstein am Ende des Einparkens.

Damit klärt sich obige sinnlose Formel weitgehend. Jedes Komma oben trennt zwei Formeln. Dann hat irgendein Textsystem leider das mathematische Zeichen $\geq$ nicht verstanden und einfach aus dem Zeichen $>$ eine Klammmer) und aus dem halben Gleichheitszeichen eine Subtraktion gemacht. Wieso allerdings aus dem Zeichen $\leq$ das englische Pfundzeichen £ geworden ist, bleibt mysteriös.

3 Kritik an Rebeccas Formeln

Prinzipiell sind Rebeccas Formeln mathematisch vernünftig, und man kann aus ihnen auch Zahlenwerte, die das Einparken beschreiben, ableiten.
Allerdings haben wir einige Kritikpunkte anzugeben.

1. In der Formel (3) ist einzig fg unbekannt, läßt sich also daraus berechnen. Man fragt sich aber, welche Bedeutung für das Einparken dieser Abstand zum Vorderauto hat. Die Formel scheint überflüssig.

2. Analoges gilt für Formel (4), aus der sich zwar am Ende des Einparkens als einzige unbekannte Größe der Abstand k zum Bordstein berechnen läßt, aber wozu braucht man ihn? Auch diese (richtige) Formel wird für das Einparkmanöver nicht gebraucht.

3. Formel (1) scheint sinnvoll zu sein, gibt sie doch der oder dem Einparker den seitlichen Abstand an, den man zu Beginn zum vorderen Nachbarauto halten sollte.

4. Formel (2) sieht nach der Hauptformel aus. Sie beschreibt, wie groß die Lücke zu sein hat, um den Parkvorgang sicher zu Ende führen zu können.

Wenn wir jetzt aber obige Formeln auf einen typischen Mittelklassewagen anwenden, so sehen wir, daß sie alle nicht recht taugen.
In den Wagenpapieren findet man die Angabe über den Wendekreis, der folgendermaßen bestimmt wurde:

Definition 3.1 *Befestigt man an der vordersten linken Ecke des Fahrzeugs einen Stab, der auf dem Boden schleift und fährt man dann den kleinstmöglichen Rechts–Kreis bei voll eingeschlagenem Steuerrad, so beschreibt dieser Stab einen Kreis, den Wendekreis des Fahrzeugs. Sein Durchmesser D wird in den Wagenpapieren verzeichnet.*
Wir wollen mit R den Radius des Wendekreises, also den halben Durchmesser bezeichnen. Dabei liegt der Mittelpunkt auf der Verlängerung der Hinterachse.

Bei einem gut gebauten Auto kann man natürlich auch einen Links–Kreis fahren und den Stab vorne rechts anbringen. Die Symmetrie führt zum gleichen Ergebnis.
Der Zusammenhang zwischen r bei Rebecca und unserem R wird nach Pythagoras ermittelt:

$$r = \sqrt{R^2 - f^2} - \frac{w}{2} \tag{5}$$

Dabei ist

- f der Abstand von der Hinterachse bis zur Fahrzeugfront
- w die Breite des Fahrzeugs

Nun zu unserem Auto. Nehmen wir an, daß es folgende Abmessungen besitzt – der Übersicht wegen nehmen wir glatte Werte:

- Wendekreis $D = 12\ m$, also $R = 6\ m$
- Abstand Hinterachse – Front $3m$
- Abstand Hinterachse – hinten $1\ m$
- Wagenbreite $w = 1.5\ m$

Damit ergibt sich

$$r = \sqrt{R^2 - f^2} - \frac{w}{2} = \sqrt{36 - 9} - 0.75 = 4.45$$

Wir rechnen also Rebeccas Formeln mit $r = 4.45\ m$ durch. Dann ist

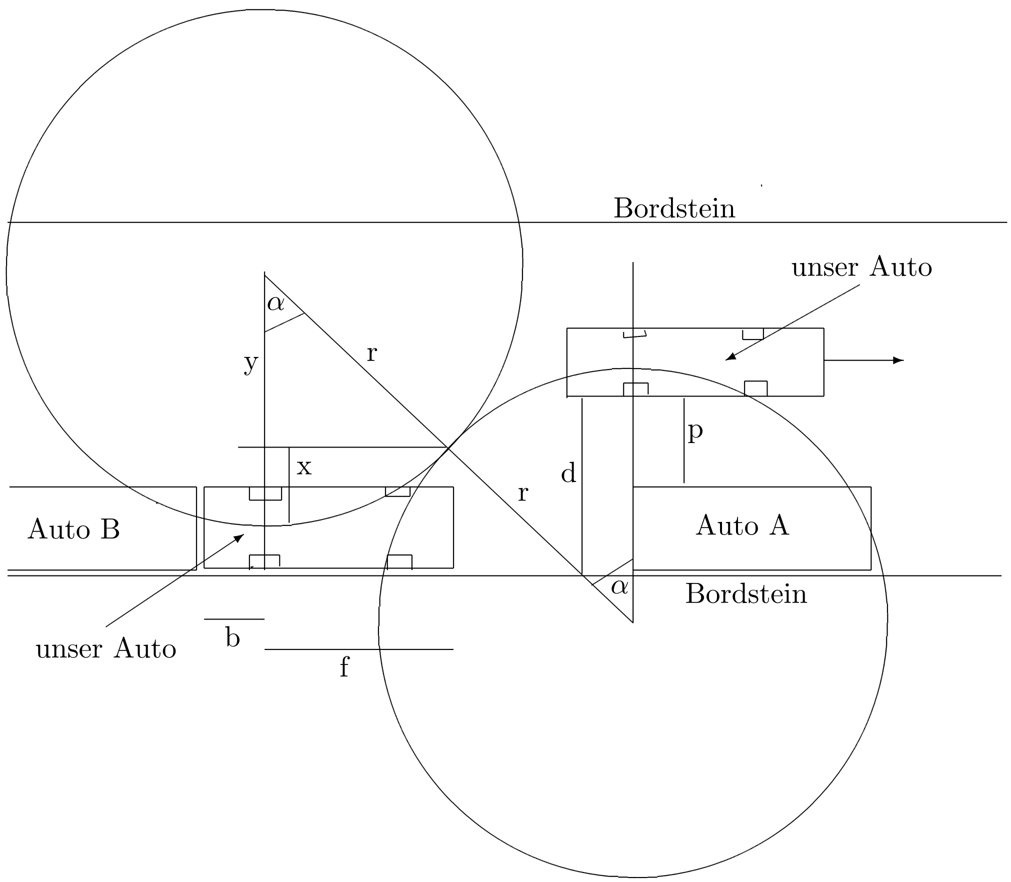
$$p = r - \frac{w}{2} = 3.69\ m,$$

$$g \geq w + 2r + b = 1.5 + 2 \cdot 4.45 + 1 = 11.40$$

Das heißt also, wir sollen zum Nachbarauto einen Abstand von 3.69 m halten. Aber liebe Rebecca, wenn eine Straße nur 6 m breit ist, steht man damit entweder voll im Gegenverkehr oder bereits im gegenüber geparkten Auto.
Wenn man eine Lücke von 11.40 m irgendwo sieht, so fährt man vorwärts hinein, denn dort ist ja Platz für zwei Autos. Da wird unser Manöver nicht benötigt.
Das kann nicht gemeint sein. Hier sind Rebeccas Formeln zwar richtig, aber viel zu grob. Das ist in europäischen Städten nicht vorstellbar.

4 Neue Formeln zum Parallelparken

Neue und bessere Formeln müssen her. Betrachten wir dazu folgende Skizze.



Zur Herleitung unserer Formeln machen wir einen Trick: Wir betrachten das *Ausparken*, nicht das Einparken. Wir gehen also von innen nach außen, weil wir da von der festen Position unseres Autos knirsch am hinteren Auto starten können. Da, wo wir landen, ist dann unser eigentlicher Ausgangspunkt. Der ganze Vorgang ist ja voll reversibel.
Betrachten wir also unsere Skizze. Wir stehen mitten im Parkplatz schön ordentlich am Bordstein. Zum Ausparken fahren wir zuerst rückwärts, bis wir gerade eben das hintere Auto nicht berühren. Mathematisch setzen wir diesen Abstand zu 0 mm. Also bitte, das ist die Theorie, in der Praxis sollten es schon 5 cm sein. Dann schlagen wir das Steuerrad vollständig nach links ein und fahren vorsichtig los. Dabei fahren wir einen Kreisbogen, zu dem ein Winkel α gehört. Diesen Winkel lassen

wir zunächst so allgemein stehen, weil wir ja eine allgemeine Formel entwickeln wollen. Später müssen wir ihn dann genauer spezifizieren.
Haben wir diesen Bogen mit Winkel α durchfahren, so bleiben wir stehen und drehen das Steuerrad vollständig in die andere Richtung, in der wir dann einen Kreisbogen wiederum mit dem Winkel α durchfahren. Das Ende vom Lied ist dann, daß wir außerhalb des Parkplatzes und parallel zur Bordsteinkante stehen; denn wir haben ja beide Male einen Kreisbogen mit demselben Winkel durchfahren.
Jetzt kommt ein bißchen Geometrie. Aus der Skizze sieht man, daß der Abstand d unseres Autos zum Bordstein gleich $2x$ ist; x berechnen wir dann über den cos des Winkels α:

$$\begin{aligned} d &= 2x = 2 \cdot (r - y) = 2 \cdot (r - r \cdot \cos\alpha) \\ &= 2r \cdot (1 - \cos\alpha) \end{aligned} \tag{6}$$

Der Abstand p zum Nachbarauto ist

$$p = d - w = 2r \cdot (1 - \cos\alpha) - w \tag{7}$$

Als Lücke erhalten wir

$$g \geq 2r \cdot \sin\alpha + b \tag{8}$$

Vergleicht man diese Lücke mit der von Rebecca (2), so ahnt man, daß Rebecca einen Winkel von 90°, also einen Viertelkreis durchfahren will.

4.1 Die Formeln für ein 45^o–Manöver

In manchen Fahrschulen wird gesagt, man solle jeweils einen Achtelkreisbogen fahren; dazu gehört der Winkel $\alpha = 45°$. Dafür sehen die Formeln hübsch einfach aus; denn es ist ja $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$, also

$$p = 2r \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - w = r(2 - \sqrt{2}) - w \tag{9}$$

$$g \geq 2r \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + b = \sqrt{2} \cdot r + b \tag{10}$$

Für unser oben schon benutztes Standardauto (vgl. S. 3) erhalten wir folgende Werte:

$$p = 1.11\ m, \quad g \geq 7.29\ m$$

Das ist immer noch zu groß. Kein vernünftiger Autofahrer und sicher auch keine noch vernünftigere Autofahrerin stellt sich im Abstand von 1.11 m zum Nachbarauto auf die Straße. Das Hupkonzert kann man sich ausmalen.

4.2 Die optimalen Formeln

Aus der Formel (8) sehen wir, daß unsere benötigte Lücke stark vom Winkel α abhängt: Je kleiner wir diesen Winkel wählen, desto kleiner wird die Lücke. Das beste Ergebnis erhalten wir, wenn wir uns direkt neben das vordere Auto stellen. Für $p = 0$, also den Abstand zum Nachbarauto $= 0$, erhalten wir den optimalen Winkel α, mit dem wir unser Einparkproblem lösen:

$$\alpha = \arccos\frac{2r - w}{2r} \tag{11}$$

Für unser Standardauto ergibt sich dabei

$$\alpha = \arccos \frac{2 \cdot 4.45 - 1.5}{2 \cdot 4.45} = 34^\circ$$

Unsere benötigte Lücke kann noch kleiner werden, wenn wir bedenken, daß wir beim Ausparken zunächst ganz weit zurücksetzen und dann beim Vorwärtsausparken nur gerade das vordere Auto nicht berühren dürfen. Dieses kann daher noch ein Stückchen näher stehen.
Als kleinstmögliche Lücke ergibt sich damit

$$g \geq \sqrt{2r \cdot w + f^2} + b, \tag{12}$$

was für unser Standardauto bedeutet:

$$g \geq \sqrt{2 \cdot 4.45 \cdot 1.5 + 9} + 1 = 5.73\ m$$

Das sieht doch sehr vernünftig aus. In Vorschriften für den Straßenbau und speziell für Parkplätze findet man die Vorgabe, daß ein Parkplatz am Straßenrand für ein paralleles Einparken mindestens die Länge von 5.75 m haben sollte. Jetzt wird das verständlich, denn wir füllen ja nicht die ganze Parklücke aus, sondern brauchen Platz zum Rangieren. Das brauchen unsere Nachbarn vorne und hinten ebenfalls, so daß von deren Platz ein bißchen für uns übrig bleibt. Das wird offensichtlich in der Vorschrift mit einbezogen.

5 Zusammenfassung

Einige Schlußbemerkungen dürfen nicht fehlen. Zunächst fassen wir unser Ergebnis in folgendem Kasten zusammen.

Die neuen Formeln zum Einparken

Abstand zum Nachbarauto	p	$=$	0
Winkel des Kreisbogens	α	$=$	$\arccos \frac{2r - w}{2r}$
benötigte Parklücke	g	$\geq$	$\sqrt{2rw + f^2} + b$

Selbstverständlich sind diese Formeln aus der Theorie geboren und so für die Praxis noch nicht tauglich.

- Einen Abstand von 0 mm zum Nachbarauto kann nur ein Theoretiker einhalten. Für die Praxis müssen da realistische Werte eingesetzt werden. Genau so sind auch alle anderen Werte so gerechnet, daß man gerade eben die Nachbarautos nicht berührt. Jedem Autofahrer sei geraten, hier eine gewisse Toleranz einzuplanen.

- Wer will denn schon mit Maßband und Winkelmesser auf Parkplatzsuche gehen. Immerhin scheint es vorstellbar, daß ein Autokonstrukteur hier vielleicht Ansätze findet, um einen Computer an Bord mit den entsprechenden Daten zu füttern und das Einparkmanöver vollautomatisch ablaufen zu lassen.

6 Werte für einige Autos auf unseren Straßen

Wir stellen hier aus den Betriebshandbüchern die Werte für einige Autos zusammen. Allerdings sollte die geneigte Leserin oder der versierte Autofreak obige Schlußbemerkungen im Auge behalten.

Hersteller	Modell	Winkel	optimale Lücke
VW	4er Golf	42°	5.50 m
BMW	3er E46	45°	5.96 m
Mercedes	C–Klasse	43°	5.88 m
Audi	A4 / S4 Limousine	43°	5.94 m
Opel	Astra 5-türig	43°	5.42 m
VW	Passat	41°	6.08 m
VW	Polo	41°	5.29 m
Ford	Focus Limousine 4-türig	42°	5.87 m
Mercedes	E–Klasse	42°	6.27 m
Opel	Corsa Limousine 3-türig	42°	5.16 m
Mercedes	Smart	42°	4.00 m
Renault	Laguna	46°	6.14 m

7 Literatur:

Rebecca Hoyle: *Requirements for a perfect s-shaped parallel parking manoeuvre in a simple mathematical model*, Preprint May 6, 2003

VOX, Auto Motor Sport TV: *Praktische Vorführung des Parallelparkens*, 19. Okt. 2003, 17.00 Uhr

SAT1, 17.30: *Praktische Vorführung des Parallelparkens*, 29. Okt. 2003, 17.30 Uhr

N3, Hallo Niedersachsen: *Praktische Vorführung des Parallelparkens*, 04. Nov. 2003, 19.30 Uhr

AutoBild: Einparken, erscheint demnächst

Zahlreiche Radiosendungen und weitere Artikel in Zeitungen

Anschrift des Autors:
Dr.Dr.h.c. N. Herrmann
Inst. f. Angew. Mathematik, Universität Hannover
Welfengarten 1
30167 Hannover