

# Numerische Lineare Algebra Einleitung

Sven Beuchler

Institut für Angewandte Mathematik  
Leibniz-Universität Hannover

13. April 2011, Hannover



## 1 Modellierung von Differentialgleichungen

- Wärmeleitung
- Elektrostatik

## 2 Approximation von Ableitungen

## 3 Finite Differenzen

- 1D Modell
- 2D Modell



# Aufgabenstellung

- **Gegeben:** aufgeheizter Stab der Länge  
Temperatur  $T_a$  am linken und Temperatur  $T_b$  am rechten Ende
- **Gesucht:** Temperaturverteilung im Stab

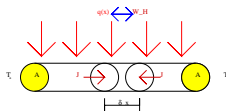
Modellierungsannahmen:

- Stab ist ein eindimensionales Kontinuum der Länge  $L$
- Wärmestrom nur in Längsrichtung
- Stab besitze eine konstante Wärmeleitzahl
- Es gibt innere stationäre Wärmequellen mit Dichte  $q(x)$



# Energiebilanz

Betrachten die Energiebilanz in einem Kontrollvolumen am Ort  $x$  mit Querschnitt  $A$  und Dicke  $\Delta x$ :



Die aufgenommene Wärmemenge  $W_H$  pro Zeit:

$$W_H = \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} q(\xi) d\xi \cdot A$$

Die abgeführte Wärmemenge  $\Delta J$  pro Zeit durch Wärmeleitung im Stab:

$$\Delta J = \left[ \sigma \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) - \sigma \left( x - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \cdot A,$$

( $\sigma$  Wärmestromdichte)

Bilanzierung der Energie (1. Hauptsatz der Thermodynamik)

$$\Delta J = W_H$$



# Herleitung

Fouriersches Wärmeleitgesetz:

$$\sigma(x) = -\lambda \frac{dT}{dx}(x).$$

mit

- $T(x)$  ist die Temperatur im Stab am Ort  $x$ ,
- $\lambda$  ist die Wärmeleitzahl des Stabes (materialabhängig)

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} q(\xi) d\xi \cdot A &= \left[ \sigma \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) - \sigma \left( x - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \cdot A \\ \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} q(\xi) d\xi &= -\lambda \frac{dT}{dx} \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) + \lambda \frac{dT}{dx} \left( x - \frac{\Delta x}{2} \right). \end{aligned}$$



# Herleitung 2

Division durch  $\Delta x$  und dem Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$  liefert:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\Delta x} \left( -\frac{dT}{dx} \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) + \frac{dT}{dx} \left( x - \frac{\Delta x}{2} \right) \right) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} q(\xi) d\xi, \\ \Leftrightarrow -\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) (x) &= q(x), \end{aligned}$$

also, falls  $\lambda$  konstant ist,

$$-\lambda \frac{d^2 T}{dx^2}(x) = q(x) \quad \text{für } x \in (0, L). \quad (1)$$

und

$$T(0) = T_a, \quad T(L) = T_b \quad (2)$$

Gleichung in 3D (Material ist homogen und isotrop):

$$-\lambda \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T = q(x, y, z)$$



# Einschub: Partielle Ableitungen

## Definition

Es sei  $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto y = f(x)$  und  $e_j \in \mathbb{R}^m$  der  $j$ -te Einheitsvektor. Dann heißt (falls existent)

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x + h e_j) - f_i(x)}{h}$$

partielle Ableitung von  $f_i$  in Richtung  $e_j$ .

Weiters ist

$$\nabla u : = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial u}{\partial x_m} \right)^T \quad \text{nur für } n = 1$$

$$\operatorname{div} u : = \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad \text{nur für } n = m$$

$$\operatorname{rot} u : = \nabla \times u \quad \text{nur für } m, n = 3$$

$$\Delta u : = \operatorname{div} \nabla u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \text{nur für } n = 1$$



# Maxwellsche Gleichungen

Modellierung elektrodynamischer Effekte mit den physikalischen Größen

- $\vec{E}$  -elektrisches Feld, Einheit ist  $\frac{V}{m}$ ,
- $\vec{B}$  -magnetische Flußdichte, Einheit ist  $\frac{Vs}{m^2}$ ,
- $\vec{D}$  -elektrische Flußdichte, Einheit ist  $\frac{As}{m^2}$ ,
- $q_E$  -Ladungsdichte, Einheit ist  $\frac{As}{m^3}$ .

Maxwellsche Gleichungen u.a.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{D} = q_E, \quad (4)$$

und das Materialgesetz  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$  mit

- $\epsilon_0/r$ ... absolute und relative Dielektrizitätskonstante, d.h.  
 $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ ,





# Potentialgleichung

Elektrostatik: elektrische Feld  $\vec{E}$  hängt nicht von der Zeit ab und es gibt keine Magnetfelder: Aus (3) folgt dann

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0,$$

d.h.  $\vec{E}$  ist wirbelfrei. Damit gibt es ein elektrisches Potential (Differenz ist Spannung  $U$ )  $\phi$  mit

$$\vec{E} = -\nabla \phi. \quad (5)$$

Mit (4) und dem Materialgesetz erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= q_E \\ \operatorname{div} \varepsilon \vec{E} &= q_E \\ -\operatorname{div} \varepsilon \nabla \phi &= q_E. \end{aligned}$$

Falls sogar  $\varepsilon = \varepsilon_0$  gilt, folgt daraus

$$-\Delta \phi = \frac{q_E}{\varepsilon_0}. \quad (6)$$



# 1. Ableitung

- **Gegeben:** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  oder einfach eine Berechnungsvorschrift  $f(x)$
- **Gesucht:** Approximation von  $f'(x)$ .
- Idee: Analysis:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

also für hinreichend kleines  $h > 0$  gilt:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: \delta_h^+ f(x) \quad \text{vorwärt. Differenzenquotient.}$$

Analog ist

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} =: \delta_h^- f(x) \quad \text{rückwärt. Differenzenquotient}$$

und der zentrale Differenzenquotient

$$f'(x) \approx \frac{1}{2} (\delta_h^+ f(x) + \delta_h^- f(x)) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \delta_h^z f(x).$$



## 2. Ableitung

Wir nähern die 2 Ableitungen jeweils durch den zentralen Differenzenquotienten mit Schrittweite  $h/2$  an:

$$\begin{aligned} f''(x) &\approx \delta_{h/2}^z f'(x) = \frac{f'(x + h/2) - f'(x - h/2)}{h} \\ &\approx \frac{1}{h} \left( \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x - h)}{h} \right) \\ &= \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2} := \delta_h^2 f(x) \end{aligned}$$

Approximation	Fehler
$f'(x) - \delta_h^+ f(x)$	$\mathcal{O}(h)$
$f'(x) - \delta_h^- f(x)$	$\mathcal{O}(h)$
$f'(x) - \delta_h^z f(x)$	$\mathcal{O}(h^2)$
$f''(x) - \delta_h^2 f(x)$	$\mathcal{O}(h^2)$



# 1D-Modell

Gesucht ist eine Funktion  $u$  mit

$$\begin{aligned}-u''(x) &= f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0,\end{aligned}$$

wobei  $f$  eine vorgegebene Funktion ist.

Das kontinuierliche Intervall  $[0, 1]$  wird durch eine endliche Punktmenge (Gitterpunkte), z.B.  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  mit  $h = 1/N$ , ersetzt. Die 2. Ortsableitung in einem Gitterpunkt wird durch den zentralen Differenzenquotienten approximiert:

$$u''(x_i) \approx \frac{1}{h^2} (u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})).$$

Es entsteht folgendes lineare Gleichungssystem:  $u_i \approx u(x_i)$

$$-\frac{1}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) = f(x_i) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, N-1$$

mit den Randbedingungen

$$u_0 = u_N = 0$$



# Lineares Gleichungssystem

Kompakt erhalten wir

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$$

mit der Matrix

$$K_h = (K_{ij})_{i,j=1,2,\dots,N-1} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und den Vektoren

$$\underline{u}_h = (u_i)_{i=1,2,\dots,N-1}, \quad \underline{f}_h = (f_i)_{i=1,2,\dots,N-1} \text{ mit } f_i = f(x_i).$$



# 2D-Modell

- Sei nun  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  (das Einheitsquadrat in der Ebene),
- $\Gamma$  bezeichnet den Rand der Menge  $\Omega$ ,
- Es sei  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  gegeben,
- Gesucht ist eine Funktion  $u : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega \end{aligned} \tag{7}$$

- Diskretisierung von (7) auf dem Gitter  
 $\Omega_h = \{(x_i, y_j) | i, j = 1, 2, \dots, N-1\}$  mit  $h = 1/N$ ,  $x_i = i \cdot h$ ,  $y_j = j \cdot h$
- zentraler Differenzenquotient für die zweiten Ableitungen  $u(x_i, y_j) \approx u_{ij}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\approx \frac{1}{h^2} (u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}), \end{aligned}$$



# Lineares Gleichungssystem

- Einsetzen in (7) liefert im Gitterpunkt  $(x_i, y_j)$  eine Differenzengleichung

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}) = f_{ij},$$

wobei  $f_{ij} = f(x_i, y_j)$ .

- Anordnung der Unbekannten  $u_{ij}$  und Differenzengleichungen zeilenweise von links nach rechts und die Zeilen von unten nach oben
- Es entsteht unter Verwendung der Randbedingungen

$$u_{0j} = 0, \quad u_{N,j} = 0, \quad u_{i0} = 0, \quad u_{i,N} = 0$$

das lineare Gleichungssystem

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$$







# Eigenschaften Matrix $K_h$

- Gleichungssystem ist für große  $N$  sehr groß ( $n_h = (N - 1)^2$  Unbekannte und Gleichungen)
- je größer  $N$ , desto genauer ist die Approximation:
  - $h$  ist ein Maß für die Feinheit der Zerlegung,
  - Größe  $n_h$  ist proportional zu  $1/h^d$ , wobei  $d$  die Raumdimension des Problems ist, kurz  $n_h = \mathcal{O}(1/h^d)$ .
- Matrix ist dünnbesetzt (maximal 5 Nichtnulleinträge pro Zeile):

